

Nome:

Cognome:

Matricola:

Fila D

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1-4: risposta giusta =1, risposta non data = 0, risposta sbagliata = $-\frac{1}{2}$. Esercizi 5-6: punti 0-8.

Esercizio 1 Siano

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x) = \int_0^x H(t)H(1-t) dt.$$

- | | | |
|--|----------------------------|----------------------------|
| 1. La funzione $H(t)$ è integrabile in $[-1, 1]$. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 2. La funzione $F(x)$ è derivabile in $x = 0$. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 3. Esiste $c \in (0, 2)$ tale che $\frac{F(2)-F(0)}{2} = H(c)H(1-c)$. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |

Esercizio 2 Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione tale che $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che la corrispondente serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n =: S$ sia

convergente. Allora, posto $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$ si ha:

- | | | |
|--|----------------------------|----------------------------|
| 1. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} a_n > 0$. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 2. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(n^2 + 2)$ è convergente. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log(\cos(a_n)) = 0$. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - e^{S_n} = +\infty$. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |

Esercizio 3 Sia $f(x)$ una funzione continua in \mathbb{R} tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$.

- | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1. f è limitata in \mathbb{R} | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 2. f è decrescente | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 3. esiste x_0 tale che $f(x_0) = 4$ | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 4. f ammette minimo | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |

Esercizio 4 Sia $y \in C^2(\mathbb{R})$ una funzione 1-periodica, e si supponga che y è una soluzione dell'equazione differenziale $w''(t) + 4w(t) = 5f(t)$ con $f \in C^0(\mathbb{R})$ diversa dalla funzione nulla.

- | | | |
|---|----------------------------|----------------------------|
| 1. f è periodica. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 2. La funzione $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $z(t) := -y(t)$ è soluzione della stessa equazione differenziale. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 3. La funzione $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $z(t) := y(t) + 2t^2$ è soluzione dell'equazione differenziale $w''(t) + w(t) = f(t) + 2t^2 + 4$. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 4. Se t_0 è un punto di massimo locale per y allora $f(t_0) \leq y(t_0)$. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |

Esercizio 5 Sia

$$f(x) = e^{\sin(\frac{1}{3}x)} - 1 - \log(1 + \frac{1}{3}x).$$

1. Determinare al variare di $\beta > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\beta}.$$

2. Determinare per quali $\beta > 0$ il seguente integrale converge

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^\beta} dx$$

Esercizio 6 Sia

$$f(x) = (x + 2) |\log(3 + x)|.$$

Si determinino

1. il dominio e gli asintoti;
2. l'insieme di derivabilità e la monotonia;
3. gli intervalli di concavità e di convessità;
4. il valore dell'integrale $\int_{-\frac{5}{2}}^{-1} f(x) dx$.